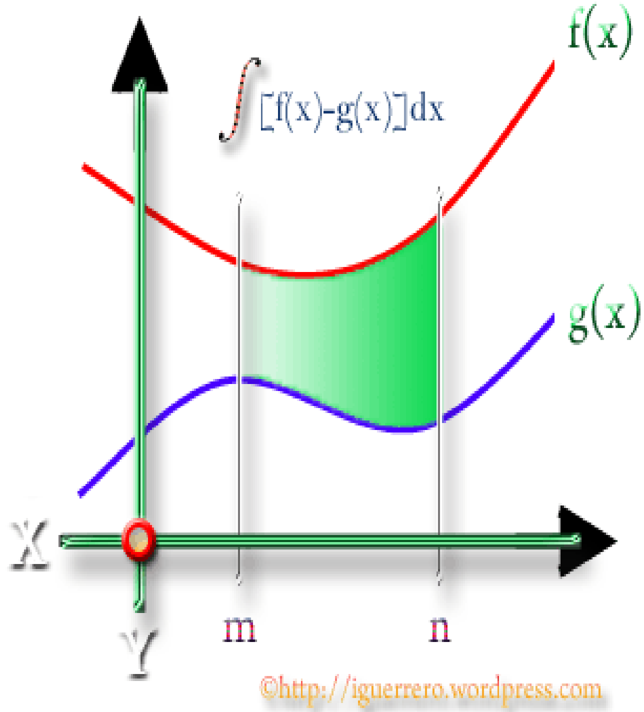
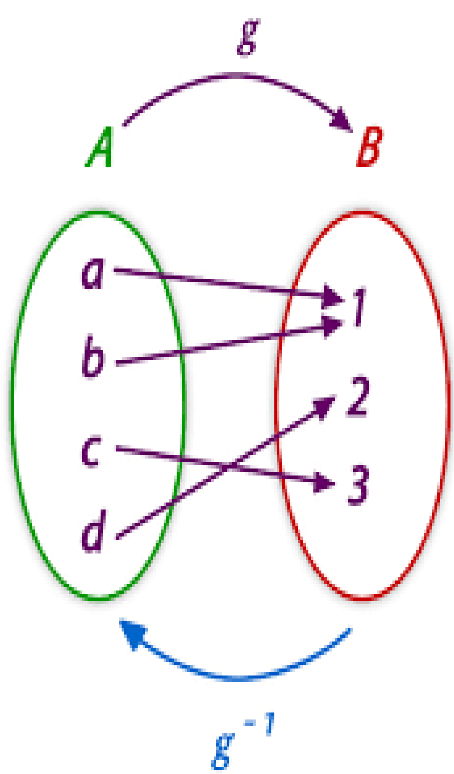
REPÚBLICA DE PANAMÁ
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
DIRECCIÓN REGIONAL DE PANAMÁ OESTE
CENTRO EDUCATIVO DE FORMACIÓN INTEGRAL GUILLERMO ENDARA GALIMANY
MODULO BASADO EN TEXTO COGNITIVO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Área: Algebra

MATEMÁTICA 12º Ciencias





Profesora:
Norma I. Sosa
Correo: normaisabel272 @gmail.com

Unidades de Aprendizaje

I- Las Cónicas

II- Relaciones y Funciones

Tema # 1

Las Cónicas

La Parábola:

Una parábola es el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija en el plano. El punto fijo se llama foco y la recta fija, directriz. En la figura 2 el punto F es el foco y la recta D la directriz. El punto V, a la mitad entre el foco y la directriz, debe pertenecer a la parábola. Este punto se llama vértice.

Elementos de la Parábola

Directriz: Es la recta fija (D), siempre está a la misma distancia del vértice que el foco del vértice.
Radio Vector: Es el segmento que une un punto cualesquiera de la parábola con el foco.
Eje: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
Vértice: Es el punto medio entre el foco y la directriz.
Cuerda: Es el segmento que une dos puntos cualesquiera. Si pasa por el foco, se llama cuerda focal.
Lado recto: es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje y su longitud es igual a $|4p|$. Considerando el valor absoluto de 4p pues p puede ser positivo o negativo, pero la longitud del lado recto siempre es positiva.
Parámetro: Es la distancia del segmento que va desde el foco a la directriz. Y se representa por 2p. Su longitud será igual a $|2p|$ y la longitud entre el vértice y el foco es el semiparámetro e igual a $|p|$.
En la figura 2 el punto F es el foco y la recta D la directriz. El punto V, a la mitad entre el foco y la directriz, debe pertenecer a la parábola. Este punto se llama vértice. Otros puntos de la parábola se pueden localizar de la siguiente manera. Dibuje una recta L paralela a la directriz (Fig. 2). Con F como centro y radio igual a la distancia entre las rectas D y L, describa arcos que corten a L en P y P'. Cada uno de estos puntos, al ser
equidistantes del foco y de la directriz, se encuentra sobre la parábola.

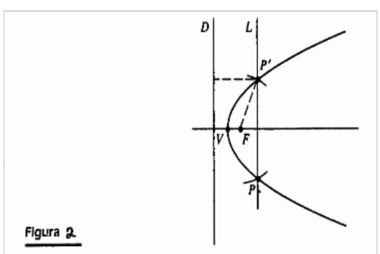


Figura 2

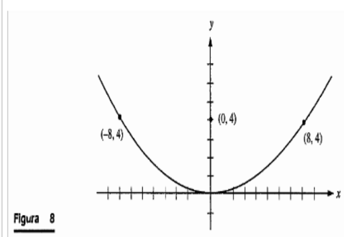


Figura 8

Vértice	Posición	Abre hacia	Ecuación	Foco	Directriz
(0 ,0)	Horizontal	Derecha	$y^2 = 4px$	(p, 0)	x = -p
(0 ,0)	Horizontal	Izquierda	$y^2 = - 4px$	(- p, 0)	x = p
(0 ,0)	Vertical	Arriba	$x^2 = 4py$	(0, p)	y = -p
(0 ,0)	Vertical	Abajo	$x^2 = - 4py$	(0, - p)	y = p

Teorema 1:
La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (p, 0) es: $\mathbf{y^2=4px}$ (1)
La parábola se abre hacia la derecha si a > 0 y se abre hacia la izquierda si a < O. La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (0, p) es: $\mathbf{x^2= 4py}$ (2)
La ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y foco en (h +p, k) es:

$$\mathbf{(y-k)^2 = 4p (x-h).}$$

La parábola se abre hacia la derecha si p> 0 y hacia la izquierda si p < 0.
La ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y foco en (h, k+p) es:

$$\mathbf{(x-h)^2=4p\ (y-k).}$$

La parábola se abre hacia arriba si a> 0 y hacia abajo si p < 0.
Ejemplo 1:
Dibuje la gráfica de la ecuación:

$$y^2+ 8x- 6y + 25 = 0.$$

Solución: La ecuación representa una parábola pues y aparece al cuadrado y x linealmente. La grafica se puede trazar con mayor rapidez si la ecuación se reduce a la forma usual. Así, completando el cuadrado, se obtiene:

$$y^2-6y + 9 =-8x-25 + 9,$$
$$(y -3)^2= -8(x + 2).$$

La relación **a = ¼ p** permite conocer a partir de la ecuación, la distancia: foco – vértice basta plantear la ecuación: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ de donde se obtiene la intersección con el eje "x"; y de la

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

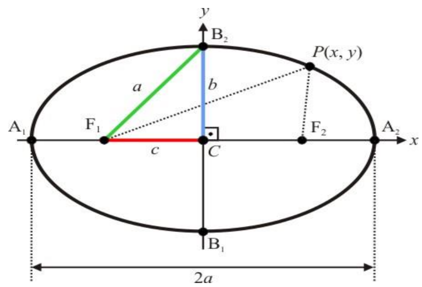
expresión:
Se tiene: abscisa del vértice y del foco = $\frac{-b}{2a}$

Ejercicios:

Encuentre las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y las coordenadas de sus extremos para cada una de las parábolas dadas. Encuentre además la ecuación de la directriz de cada parábola. Dibuje cada curva.
1. $y^2= 4x$ 2. $y^2 = -16x$ 3. $x^2 = 4y$
4. $x^2= -l0y$ 5. $(x + 2)^2 = 20 (y – 5)$ 6. $(x + 3)^2 = -12 (y + 3)$
7. $(y – 2)^2 = 3 (x – 2)$ 8. $2x^2 + 8x – y + 8 = 0$ 9) $3x^2 – 6x + 3y – 7 = 0$ 10) $y^2 = 20x$

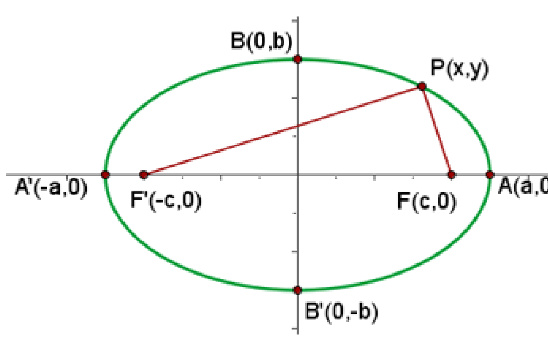
La Elipse

Definición:
Una elipse es el conjunto de puntos (x, y) en el plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a > b > 0$$

Es la **ecuación canónica** de la elipse con centro (0,0)
Estos cuatro puntos se denominan *vértices* de la elipse.
a:se denomina *semieje mayor*
b es el *semieje menor*
c es la *semidistancia focal:* (distancia del centro a un foco)



2c es la distancia entre los focos

Eje focal: es la recta que pasa por los focos, en este caso el eje x

Elementos de la elipse:

1. **Focos:** Son los puntos fijos F y F'.
2. **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.
3. **Eje secundario:** Es la mediatriz del segmento FF'.
4. **Centro:** Es el punto de intersección de los ejes.
5. **Radios vectores:** Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF y PF'.
6. **Cuerda**: Es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse.
7. **Distancia focal:** Es el segmento segmento de longitud 2c, c es el valor de la semidistancia focal. De F y F'.
8. **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.
9. **Eje mayor:** Es el segmento segmento de longitud 2a, a es el valor del semieje mayor.
10. **Eje menor:** Es el segmento segmento de longitud 2b, b es el valor del semieje menor.
11. **Excentricidad:** es la razón de la semidistancia focal al semieje mayor y se representa por e y mide el achatamiento de las elipses.
12. **Lado recto:** Son las cuerdas que pasan por los focos y corta la elipse en dos puntos, V` y V, llamados vértices.
13. **Centro de simetría:** Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

Ejemplo 1

Hallar vértices, focos, eje focal, graficar y calcular excentricidad de la siguiente elipse:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b$$

Resolución

Calculemos los valores de a y b:

$$a^2=10 \Rightarrow a=\sqrt{10}$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

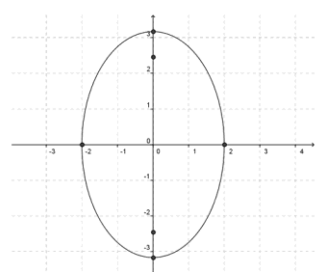
Entonces podemos dar las coordenadas de los vértices:

$$V_1\,(0,\sqrt{10}); \quad V_2(0,-\sqrt{10}); \quad V_3(2,0); \quad V_4(-2,0)$$

Eje focal: es el eje y, porque el denominador de y^2 es mayor que el denominador de x^2.

Para hallar las coordenadas de los focos necesitamos calcular c:

$$c^2=a^2-b^2=10-4=6$$



F1 $(0,-\sqrt{6})$ y F2$(0,\sqrt{6})$

Excentricidad de la elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

La gráfica es:

Correo: normaisabel272@gmail.com

Práctica

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

3) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

4) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

5) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$

6) $9x^2+4y^2=36$

7) $5x^2+3y^2=15$

8) $16x^2+25y^2=400$

9) $x^2+3y^2=6$

10) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$

Taller # 1

Las Cónicas

Integrantes: ______________________________ *Pts. Obt.*_________
____

Nivel: 12° _______ Ciencias Valor: 40 Puntos

Fecha: ________

Indicaciones: Lea cuidadosamente cada pregunta y escriba la respuesta en forma clara. No deje respuestas a lápiz, utilice tinta negra o azul, no tache, ni use corrector. Utilice un lápiz 2HB donde
se pueda apreciar los procedimientos realizados.

I. Indique el vértice y foco de las siguientes ecuaciones de la parábola

Ecuación	Distancia (p)	Vértice
$y^2 = 20x$		
$(y - 2)^2 = 3(x - 2)$		
$(y + 3)^2 = 8(x + 1)$		
$(x + 3)^2 = -12(y + 3)$		

II. Escribe la distancia p y la ecuación de las parábolas con foco y vértice indicados.

Foco	Vértice	Distancia (p)	Ecuación
(-2, 5)	(2 , 2)		
(3, 4)	(1 , 4)		
(5,4)	(-2 , 4)		
(-4 -3)	(-1, 2)		

I. Indique el vértice y foco de las siguientes ecuaciones de la parábola

Ecuación	Distancia (p)	Vértice
$y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$		
$2x^2 + 8x - y + 8 = 0$		
$3x^2 - 6x + 3y - 7 = 0$		
$x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$		

II. Realice la gráfica de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
2. $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

Escala valorativa para Taller de Las Cónicas (La Parabola)

Matemática 12º ______ Ciencias Total de puntos: 30 Nota final: ____________

Integrantes:_______________________________________ , _______________________________________

Desarrollo / procedimiento de cada problema de la prueba		
Indicador	**Valor**	**Puntos**
Puntualidad	4	
Análisis del problema (identificación de variables y método a utilizar)	4	
Planteamiento del problema (fórmulas)	4	
Desarrollo / procedimiento	10	
Análisis de resultados (razonamiento matemático) (gráfica)	4	
Limpieza y orden	4	
Total	**30**	

Correo: normaisabel272@gmail.com

Taller # 2

Las Cónicas

Integrantes: ______________________________ *Pts. Obt.*________
____

Nivel: 12° _______ Ciencias Valor: 40 Puntos

Fecha: _________

Indicaciones: Lea cuidadosamente cada pregunta y escriba la respuesta en forma clara. No deje respuestas a lápiz, utilice tinta negra o azul, no tache, ni use corrector. Utilice un lápiz 2HB donde se pueda apreciar los procedimientos realizados.

I. Encuentre: los vértices, focos, distancia, eje mayor, eje menor, excentricidad de cada una de las elipses.

I.

1) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$

4) $3x^2 + 5y^2 = 15$

5) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

6) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

II. Encuentre las coordenadas de los focos y de los vértices y traza la gráfica.

1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

3) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$

5) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

7) $4x^2 + 9y^2 = 36$

2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

4) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

6) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

8) $16x^2+25y^2 =100$

9) $x^2 + 3y^2 = 6$

10) $5x^2 + 3y^2 = 15$

Escala valorativa para Taller de Las Cónicas (La Elipse)

Matemática 12º ______ Ciencias Total de puntos: 40 Nota final: ____________

Integrantes:______________________________________ , ______________________________________

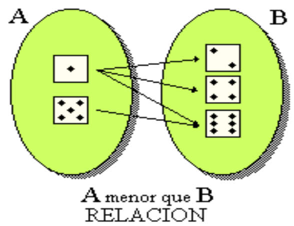
Desarrollo / procedimiento de cada problema de la prueba		
Indicador	**Valor**	**Puntos**
Puntualidad	4	
Análisis del problema (identificación de variables y método a utilizar)	4	
Planteamiento del problema (fórmulas)	4	
Desarrollo / procedimiento	20	
Análisis de resultados (razonamiento matemático) (gráfica)	4	
Limpieza y orden	4	
Total	**40**	

Correo: normaisabel272@gmail.com

Tema # 2

Relaciones y Funciones

Relación es la correspondencia entre los elementos de un primer conjunto, llamado Dominio, con un segundo conjunto, llamado Imagen o Codominio, de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del conjunto Imagen.

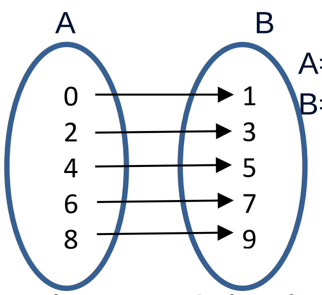


Ejemplo: Si tenemos dos conjuntos A y B tales que A={ 0, 2, 4, 6, 8 } y B={1, 3, 5, 7, 9} y establecemos una correspondencia o una relación entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B.

1) {(0, 1), (0, 3), (0, 5), (0, 7), (0, 9)} es una relación,
2) {(2, 3), (2, 7), (4, 5), (6, 7), (8, 9)} es una relación,

En una relación, el conjunto de las primeras componentes en los pares ordenados se le llama conjunto de partida o dominio de la relación, y el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados se le llama conjunto de llegada o contradominio o codominio o recorrido de la relación.

La representación gráfica de una relación de A en B, es



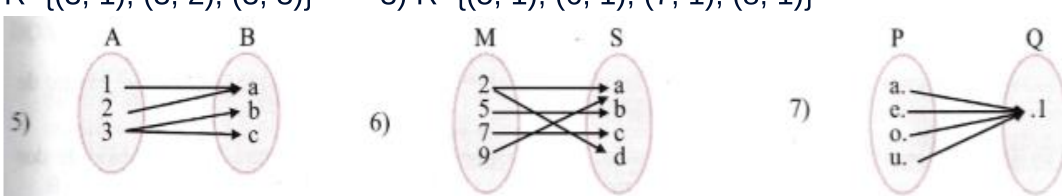
A= Dominio ={ 0, 2, 4, 6, 8 } = D (R) = Conjunto de partida
B= Codominio ={1, 3, 5, 7, 9}= C (R) = Conjunto de llegada

Los elementos de la relación vienen dados por los pares ordenados.

R={(0, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)}

Veamos los siguientes ejemplos de relaciones:

1) R={(1, 2), (3, 4), (3, 8)}   3) R={(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)}
2) R={(3, 1), (3, 2), (3, 3)}   3) R={(5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1)}



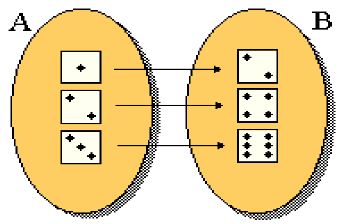
$R = \{(1,a),(2,a),(3,b),(3,c)\}$ $R = \{(2,a),(2,d),(5,b),(7,c),(9,a)\}$ $R = \{(a,1),(e,1),(o,1),(u,1)\}$

$D(R) = \{1,2,3\}$, $C(R) = \{a,b,c\}$ $D(R) = \{2,5,7,9\}$, $C(R) = \{a,b,c,d\}$ $D(R) = \{a,e,o,u\}$, $C(R) = \{1\}$

Las relaciones entre varios conjuntos de objetos abundan en la vida diaria. Por ejemplo:

A cada persona corresponde un peso. En un supermercado, a cada artículo corresponde un precio.
A cada automóvil corresponde un número de placa.
A cada niño corresponde una mamá.

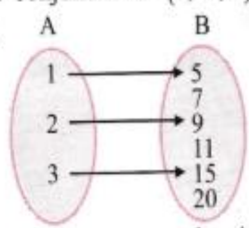
Función aplicación o mapeo f, es una relación entre un conjunto de partida X denominado dominio y un conjunto de llegada Y denominado imagen o codominio de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento imagen f(x).



190 × 378
A mitad de B
FUNCION

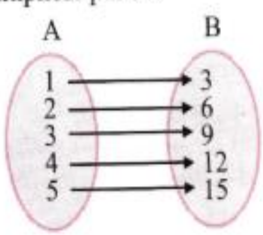
EJEMPLOS:

1. Dados los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{5,7,9,11,15,20\}$ y la relación f definida por el siguiente diagrama.



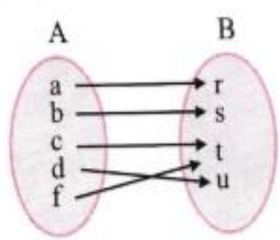
Se observa que cualquier elemento del conjunto A, está relacionado con un solo elemento del conjunto B.

2. Consideremos la correspondencia de $A=\{1,2,3,4,5\}$ en $B=\{3,6,9,12,15\}$, definida por el criterio "multiplicar por 3".



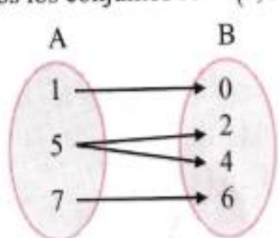
Se observa que cada elemento del conjunto A está relacionado con un solo elemento del conjunto B.

3. Sean $A=\{a,b,c,d,f\}$, $B=\{r,s,t,u\}$ y la relación definida de A en B mediante el siguiente conjunto de parejas: $\{(a,r),(b,s),(c,t),(d,u),(f,t)\}$.



Se observa que hay dos elementos del conjunto A, que están relacionados con el mismo elemento en B.

4. Dados los conjuntos $A=\{1,5,7\}$ y $B=\{0,2,4,6\}$



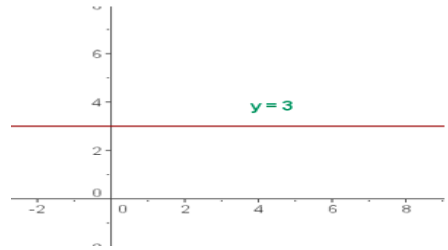
Se observa que hay un elemento del conjunto A, que está relacionado con dos elementos del conjunto B. Por tanto, es una relación, y no una función.

La relación f de A en B es: $R=\{(1,0),(5,2),(5,4),(7,6)\}$

Clasificación de las funciones

1) **Función Constante**

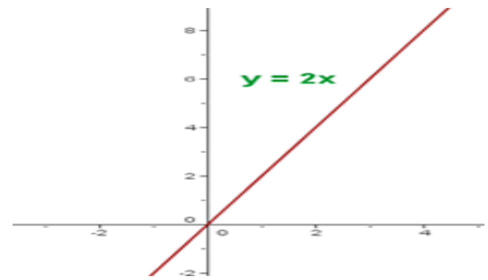
La función constante es del tipo: f(x)= a grado cero
El criterio viene dado por un número real.
La pendiente es 0.
La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.



2) **Función lineal**

f(x) = mx +b
Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función, que pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplo: **f(x) = 2x**



Para representar la función le damos al menos dos valores

x	0	1	2	3	4
$y=2x$	0	2	4	6	8

3) **Función cuadrática**

f(x) = ax² + bx +c
Son funciones polinómicas es de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.
Las funciones polinómicas son aquellas constituidas por un polinomio, un ejemplo de estas es la función cuadrática o de segundo grado, representada con una gráfica de parábola y la siguiente ecuación: $f(x) = ax^2 + bx + c$

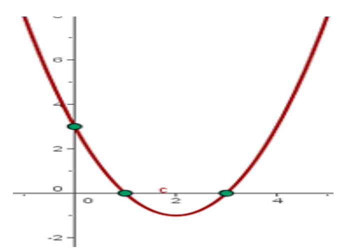
$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

El vértice se obtiene
$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Así mismo, la ecuación del eje de simetría es: $x = -\frac{b}{2a}$

Ejemplo

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



Vértice $x_v = -\frac{-4}{2} = 2 \qquad y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

Entonces las coordenadas del vértice son: $V(2, -1)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Para resolver la ecuación, utilizamos la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

En este caso hemos encontrado dos puntos de corte los cuales son: $(3, 0)$ y $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y

Para encontrar el punto de corte con Y basta con conocer el valor de la constante c que en este caso es 3 y las coordenadas son: $(0, 3)$.

Taller # 3

Relaciones y Funciones

Nombre: ____________________________   *Pts. Obt.*________
Nivel: 12° _______ Ciencias   Valor: 40 Puntos
Fecha: ________

Indicaciones: Lea cuidadosamente cada pregunta y escriba la respuesta en forma clara. No deje respuestas a lápiz, utilice tinta negra o azul, no tache, ni use corrector. Utilice un lápiz 2HB donde se pueda apreciar los procedimientos realizados.

I. Especifique el dominio y codominio de las relaciones

Especifico el dominio y el codominio de las relaciones.

$R = \{(2,1),(2,2),(3,3)\}$

$R = \{(4,2),(5,1),(0,6),(6,0),(-1,7),(-4,10)\}$

$R = \{(10,0),(14,4),(20,10),(0,-10),(8,-2),(14,12)\}$

$R = \{(0,0),(3,9),(1,3),(-1,-3),(1/3,1),(1/4,3/4)\}$

$R = \{(3,0),(1,4),(0,6),(-3,12),(6,-6),(7,-8)\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(-1,-1)\}$

$R = \{(0,0),(1,-1),(-1,1),(2,-2),(3,-3)\}$

$R = \{(2,1),(0,3),(3,0),(-1,4),(9,-6)\}$

9) $R = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$

10) $R = \{(-2,1),(-1,2),(0,3)\}$

11) $R = \{(3,-1),(2,-1),(1,-1)\}$

12) $R = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

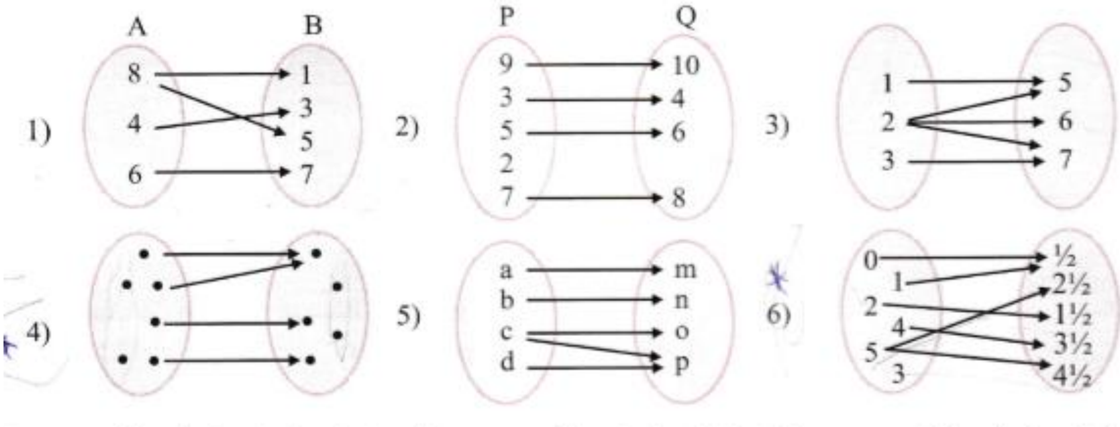
13) $R = \{(-1,2),(-2,2),(-3,3)\}$

14) $R = \{(1,0),(2,0),(1,1),(2,1)\}$

15) $R = \{(3,2),(4,-1),(3,-1),(3,3)\}$

II. Indique si representan o no una función

I. Analizo y explico por qué los siguientes diagramas no representan una función.



7) $F = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,4)\}$ 8) $G = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ 9) $H = \{(3,4),(3,5),(3,6)\}$

10) $I = \{(-1,2),(-1,6),(-1,10)\}$

III. Dibuje el diagrama e indique si es una función

1) $\{(0,5),(1,6),(2,9),(3,11)\}$, 2) $\{(-1,0),(1,0),(3,8),(-3,8)\}$,

3) $\{(4,-1),(8,-1),(10,-1),(-3,-1)\}$, 4) $\{(-2,4),(-1,11),(0,20),(1,31)\}$,

5) $\{(4,2),(3,-2)\}$

IV. Determine dominio, codominio y grafique las siguientes funciones cuadráticas

1) f(x)= $x^2 - 2x - 3$
2) f(x)= $x^2 + 4x + 4$
3) f(x)= $1 - x^2$
4) f(x)= $x^2 + 8x + 15$
5) f(x)= $x^2 - 6x + 5$

Escala valorativa para Taller de Las Relaciones y Funciones

Matemática 12º ______ Ciencias Total de puntos: 40 Nota final: ____________

Nombre:____

Desarrollo / procedimiento de cada problema de la prueba		
Indicador	**Valor**	**Puntos**
Puntualidad	4	
Análisis del problema (identificación de variables y método a utilizar)	4	
Planteamiento del problema (fórmulas)	4	
Desarrollo / procedimiento	20	
Análisis de resultados (razonamiento matemático) (gráfica)	4	
Limpieza y orden	4	
Total	**40**	

Fecha de Entrega de talleres

Taller # 1 y Taller # 2: Asignados previamente. (Grupo de 2 estudiantes
Fecha de entrega final: 20 de Marzo de 2020

Taller # 3 Individual. Fecha de entrega: 25 de Marzo de 2020